Dif. Denk. I Arasınav Çözümleri

1) $y' = \dfrac{1}{3x-y-2} + 3$, $y(0) = -1$ Denklem 3-a) dır. $u = 3x-y$ (veya $u = 3x-y-2$) alınırsa $u' = 3 - y'$, $y' = 3 - u'$ olur. Böylece denklem $\cancel{3} - u' = \dfrac{1}{u-2} + \cancel{3} \Rightarrow -\int (u-2)\,du = \int dx \Rightarrow -\dfrac{u^2}{2} + 2u = x + c$

$u = 3x - y$ old. $-\frac{1}{2}(3x-y)^2 + 2(3x-y) = x + c$ olur. $y(0) = -1$ old.dan

$-\frac{1}{2}(3.0-1)^2 + 2(3.0-(-1)) = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ olur. Çözüm

$-\frac{1}{2}(3x-y)^2 + 2(3x-y) = x + \frac{3}{2}$ olur

2) $(2y+1)\,dx - (1-2y+2x)\,dy = 0$, $y(1) = 0$. Denkl. $y' = \dfrac{2y+1}{1-2y+2x}$ şek yazılırsa 3-b) old. açıktır.

$\left.\begin{array}{l} x = X + h \\ y = Y + k \end{array}\right\}$ $h = ?\ k = ?$ $\begin{array}{l} 2k + 1 = 0 \\ + \ -2k + 2h + 1 = 0 \end{array}\Bigg\}$ $h = -1$, $k = -1/2$ $\begin{array}{l} x = X - 1 \\ y = Y - 1/2 \end{array}$ $y' = Y'$ dır.

dnt uyg. denkl. $Y' = \dfrac{2Y}{2X - 2Y}$ SDH olur. $Y = uX$, $Y' = u'X + u$ uyg.

$u'X + u = \dfrac{2uX}{2X - 2uX} \Rightarrow u'X = \dfrac{u}{1-u} - u \Rightarrow \dfrac{du}{dX}X = \dfrac{u - u + u^2}{1-u} \Rightarrow \dfrac{1-u}{u^2}du = \dfrac{dX}{X}$

$\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\frac{1}{u} - \ln u = \ln X + c$ $\quad u = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y + 1/2}{x+1}$ alınırsa

$-\dfrac{x+1}{y+1/2} - \ln\left(\dfrac{y+1/2}{x+1}\right) = \ln(x+1) + c \Rightarrow y(1) = 0,\ -\dfrac{2}{1/2} - \ln\left(\dfrac{1/2}{2}\right) = \ln 2 + c$

$c = -4 - \ln\frac{1}{4} - \ln 2$ olur. Çözüm $-\dfrac{x+1}{y+1/2} - \ln\left(\dfrac{y+1/2}{x+1}\right) = \ln(x+1) - 4 - \ln\frac{1}{4} - \ln 2$ olur.

3) $y' = \dfrac{xy^2 - y + y^2 - xy}{1 + x^2 - y - x^2y} \Rightarrow y' = \dfrac{y^2(x+1) - y(x+1)}{x^2(1-y) + (1-y)} \Rightarrow y' = \dfrac{(x+1)(y^2-y)}{(1-y)(x^2+1)}$

$y' = \dfrac{(x+1)\cdot y\cancel{(y-1)}}{(x^2+1)\cancel{(1-y)}} \Rightarrow y' = -\dfrac{x+1}{x^2+1}\cdot y$ DA $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{x+1}{x^2+1}dx$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + c$

4) $\underbrace{\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}-2xy+ye^{xy}\right)}_{P}dx-\underbrace{\left(\frac{x}{(x+y)^2}+x^2-xe^{xy}\right)}_{Q}dy=0$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x(x+y)}{(x+y)^4}-2x+e^{xy}+xye^{xy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x(x+y)}{(x+y)^2}-2x+e^{xy}+xye^{xy}$$

$\left.\right\}\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ TD dir.

$$\int\Big(\overset{1}{\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}}\overset{2}{-2xy}+\overset{3}{ye^{xy}}\Big)dx+\int\Big(\overset{1}{-\frac{x}{(x+y)^2}}\overset{2}{-x^2}+\overset{3}{xe^{xy}}\Big)dy=\int 0\,dx$$

Bu integraller birbirine eşit çıkacaktır.

$$\overset{1}{\ln(x+y)-\cancel{\int\frac{x}{(x+y)^2}dx}}\overset{2}{-x^2y}+\overset{3}{e^{xy}}+\overset{1}{\frac{x}{x+y}}\overset{2}{-x^2y}+\overset{3}{e^{xy}}=C$$

$\frac{x}{x+y}-x^2y+e^{xy}=C$ olur (Burada

$\int\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\right)dx$ ile $\int-\frac{x}{(x+y)^2}dy$ int. sabit farkıyla

birbirlerine eşittir. Veya $\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{x+y-\cancel{x}}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}$

olur.

$\int\frac{y}{(x+y)^2}dx$ ile $\int\frac{-x}{(x+y)^2}dy$ sabit farkıyla eşittirler

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$-\frac{y}{x+y}\qquad\qquad \frac{x}{x+y}=\frac{x+y-y}{x+y}=1-\frac{y}{x+y}\ )$$

5) $y(1+\ln y-\ln x)dx - x dy = 0 \quad y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$ SDH

$y = ux \quad , y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = \frac{ux}{x}\left(1+\ln\frac{ux}{x}\right)$

$u'x = u\ln u \Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\frac{1}{u}}{\ln u}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u) = \ln x + \ln c$

$\ln u = cx \Rightarrow \ln\frac{y}{x} = cx$ olur.

6) $y^2 = 2x$ parabolün teğet doğru ailesinin dif. denk

Eğri üzerinde bir nokta (x_0, y_0) olsun. Bu noktada teğet doğru denk $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ dır. Burada

$y^2 = 2x \Rightarrow 2yy' = 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{y} \quad , (y = f(x) \quad , y' = f'(x))$

$y' = \frac{1}{y_0}$ dır. (x_0, y_0) eğrinin üzerinde old. dan $y_0^2 = 2x_0$

$x_0 = \frac{y_0^2}{2}$ olur. Böylece teğet doğru ailesi

$y - y_0 = \frac{1}{y_0}\left(x - \frac{y_0^2}{2}\right)$ olur. Bir kez türev alınırsa

$y' = \frac{1}{y_0}$ olur. $y_0 = \frac{1}{y'}$ olur. Dif denk

$y - \frac{1}{y'} = y'\left(x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'}\right)^2\right)$ şek elde edilir.

$\left(y^2 = 2x \Rightarrow y = \mp\sqrt{2x}\right.$ de alınabilir$\left.\right)$